

FACULTÉ DES ARTS ET DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
ANNÉE 2017–18

PLAN DE COURS

Sigle du cours: PHY 3214

Titre du cours: Compléments de mécanique statistique

Nombre de crédits: 3

Professeur: Gilles Fontaine (F-415), Tél.: 343-6111 X-47666

BUT DU COURS

Reviser les notions fondamentales de la mécanique statistique en équilibre, en particulier les distributions statistiques quantiques (Bose–Einstein, Fermi–Dirac). Étudier en détail les propriétés thermodynamiques de systèmes idéalisés par l’approximation du gaz parfait. Se familiariser avec ces concepts avec l’aide de nombreuses et importantes applications du domaine de la physique. Introduire l’approche formelle à la thermodynamique de gaz réels.

CONTENU

1. Notions fondamentales

- 1.1 Ensembles statistiques
- 1.2 Utilité des ensembles statistiques
- 1.3 Méthode de la distribution la plus probable
- 1.4 Évaluation du coefficient β
- 1.5 Contact avec la thermodynamique
- 1.6 L’approche grand canonique
- 1.7 Stratégie à suivre

2. Distributions statistiques

- 2.1 Quelques résultats de la mécanique quantique
- 2.2 Bosons et fermions
- 2.3 Fonctions de partition
- 2.4 Distributions
- 2.5 Limite classique des statistiques quantiques
- 2.6 Les résultats importants

3. Gaz parfait à la limite classique

- 3.1 États d’énergie d’un gaz monoatomique
- 3.2 La fonction de partition de translation
- 3.3 Les fonctions de partition électronique et nucléaire
- 3.4 Propriétés thermodynamiques
- 3.5 Généralisation à un gaz à plusieurs composantes
- 3.6 Généralisation à un gaz réactif
- 3.7 Application: gaz d’hydrogène partiellement ionisé
- 3.8 Gaz diatomique

3.9 Validité de nos approximations

3.10 Application supplémentaire

4. Gaz parfait de Bose–Einstein

4.1 Gaz parfait de Bose–Einstein: fonction de partition

4.2 Propriétés thermodynamiques

4.3 Dégénérescence faible

4.4 Dégénérescence forte: condensation de Bose–Einstein

4.5 Thermodynamique d'un gaz de photons

4.6 Radiation en équilibre thermodynamique

4.7 Corps noir

4.8 Émissivité d'un objet maintenu à une température T

4.9 Application: théorie de Debye des solides

4.10 Applications supplémentaires

5. Gaz parfait de Fermi–Dirac

5.1 Propriétés thermodynamiques

5.2 Gaz faiblement dégénéré

5.3 Gaz complètement dégénéré

5.4 Gaz fortement dégénéré

5.5 Gaz arbitrairement dégénéré

5.6 Application: thermodynamique d'un gaz d'électrons

5.7 Application: électrons de conduction dans un métal

5.8 Application: théories des étoiles dégénérées

6. Gaz réel: théorie des plasmas stellaires

6.1 Les plasmas stellaires

6.2 Étude du plan densité–température

6.3 Approche formelle au gaz réel

6.4 Équations d'état de plasmas stellaires

A. Compléments mathématiques

A.1 La méthode du terme maximum

A.2 La méthode des multiplicateurs de Lagrange

A.3 Sur l'approximation de Stirling

A.4 La fonction zeta de Riemann

B. Compléments de physique

B.1 Équivalence des ensembles

B.2 Distribution canonique

Une liste non exhaustive des phénomènes, concepts, lois et applications considérés dans le cours contient les éléments suivants: indiscernabilité de particules identiques; *propriétés de symétrie de la fonction d'onde totale d'un ensemble de particules identiques*; bosons et fermions; *principe d'exclusion de Pauli*; distribution de Bose–Einstein, de Fermi–Dirac et de Maxwell–Boltzmann; *attraction et répulsion statistique*; dégénérescence; *équation d'état d'un gaz parfait monoatomique classique: translation, excitation électronique (formule de Boltzmann), excitation nucléaire et spin*; gaz à plusieurs espèces de particules; *loi barométrique d'une atmosphère isotherme*; gaz réactif: équilibre chimique; *ionisation*

atomique: équation de Saha; les raies de Balmer d'hydrogène dans les spectres stellaires; gaz diatomique: rotation et vibration de molécules; condensation de Bose–Einstein; superfluidité et supraconductivité; spin des photons; pression de radiation; expansion adiabatique de l'Univers; formule de Planck; loi de Wien; découplage matière–rayonnement dans l'Univers en expansion; invariance de la formule de Planck dans un univers en expansion; création de paires positron–électron dans un bain de photons; corps noir; loi de Stephan–Boltzmann; loi de Kirchoff; phonons: théorie de Debye des solides; loi de Dulong et Petit; le modèle de Einstein des solides; gaz d'électrons; impulsion et température de Fermi; électrons de conduction dans un solide métallique; émission thermo–ionique (effet Richardson); effet photoélectrique; les photomultiplicateurs; matière sombre et neutrinos massifs; théorie des étoiles naines blanches et à neutrons; masse limite de Chandrasekhar; théorie des plasmas stellaires; fréquence de plasma; modèle de Debye–Hückel d'un gaz de Coulomb; rayon de Debye; pression de Coulomb; modèle de la sphère ionique; modèle de Thomas–Fermi d'un gaz réel.

RÉFÉRENCES

Des notes manuscrites constituent la référence principale et incontournable de ce cours. Ces notes sont disponibles sous la forme d'un fichier, PHY3214.pdf, accessible via le lien internet suivant: www.astro.umontreal.ca/~fontaine.

Cet ouvrage de 451 pages, écrit en français, représente plus de 2200 heures de travail de la part de son auteur, Gilles Fontaine. Les notes portent une forte empreinte de sa formation d'astrophysicien et ont été “distillées”, en partie, des ouvrages suivants:

Reif, F. 1965, “Fundamentals of Statistical and Thermal Physics”, McGraw–Hill,

Tolman, R.C. 1979, “The Principles of Statistical and Thermal Physics”, Dover (Oxford 1938),

Landau, L.D. et Lifshitz, E.M. 1984, “Physique Statistique”, Mir,

Pathria, R.K. 1972, “Statistical Mechanics”, Pergamon Press,

Huang, K. 1987, “Statistical Mechanics”, Wiley,

McQuarrie, D.A. 1976, “Statistical Mechanics”, Harper and Row,

Eliezer, S., Ghatak, A., and Hora, H. 1986, “An Introduction to Equations of State: Theory and Applications”, Cambridge University Press,

Vauclair, S. 1993, “Éléments de physique statistique”, Interéditions.

Des exemplaires de ces livres (sauf Eliezer et al., non disponible car probablement volé!) sont en réserve à la bibliothèque de physique.

DOCUMENTS SUPPLÉMENTAIRES

Des documents supplémentaires seront distribués au cours du trimestre. Ces documents consistent principalement à quelques quelques notes additionnelles et démonstrations qui ont été rédigées pour compléter le recueil principal de notes.

PRÉPARATION

Le prérequis officiel est le cours “Physique thermique et statistique” (PHY 2215) ou son équivalent. Dans ce contexte, le premier chapitre des notes de cours, intitulé **Notions fondamentales**, est censé être un rappel des concepts de base de la mécanique statistique tels que vus en PHY 2215. Il est très fortement conseillé de lire (et même relire!) ce chapitre au tout début du trimestre. Il est également

souhaitable, quoique non absolument essentiel, d'avoir suivi au moins un cours d'introduction à la mécanique quantique.

Historiquement, le cours en était un de 4 crédits et était constitué de 4h d'exposés théoriques incorporant des démonstrations. Les notes ont été écrites dans ce contexte et couvrent donc plus de matière qu'il est possible d'en voir dans le cadre révisé d'un cours de 3 crédits. Une sélection de sujets d'étude sera donc faite, mais les notes non abordées pourront très certainement servir à ceux qui veulent en savoir plus.

MÉTHODE D'ÉVALUATION

(À discuter en classe)

- 1) Devoirs à contribution positive (6 devoirs au cours du trimestre) 40%
- 2) Examen final couvrant toute la matière (13:30–16:30 [3h], 14 décembre 2017, local 1360 PAA) 60%

CORRECTEUR

Benoit Rolland (local D-433), internet: rolland@astro.umontreal.ca

HORAIRE

cours: lundi 10:30–13:20 local 7206, Pavillon André-Aisenstadt (PAA)

Il n'y aura pas de séances formelles de travaux pratiques (démonstrations) le jeudi contrairement à l'horaire affiché sur le site internet de l'UdeM. Par contre, nous réserverons cette période (local 1171 PAA, 14:30–15:20) pour reprendre certains cours, au besoin.

DISPONIBILITÉ

Le professeur sera normalement disponible à son bureau les lundis dans l'après-midi suivant le cours (et les jeudis, le cas échéant). Il y a peu de chances qu'il ait le temps de répondre à temps aux courriers électroniques individuels.

FACULTÉ DES ARTS ET DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
ANNÉE 2017–18

POURQUOI PHY-3214?

MÉCANIQUE STATISTIQUE

La mécanique statistique est l'étude des propriétés physiques de systèmes **macroscopiques** (contenant un TRÈS grand nombre de particules) à partir d'un point de vue **microscopique** (atomes et molécules).

On veut donc comprendre et prédire les phénomènes macroscopiques et calculer leurs propriétés globales à partir des propriétés des atomes (molécules) présents dans le système.

IMPORTANCE DE LA MÉCANIQUE STATISTIQUE

Dans **tous** les domaines de la physique (à l'exception parfois de la physique des particules) on s'intéresse à des systèmes contenant un très grand nombre de particules. On a donc **besoin** des outils de la mécanique statistique dans les disciplines suivantes:

- astrophysique
- physique des plasmas
- matière condensée
- biophysique
- chimie et biochimie

Dans ces domaines de recherche, on utilise habituellement les concepts de physique statistique (que nous allons étudier) comme **outils** de travail.

Il y a aussi des recherches fort importantes au niveau des principes de base de la mécanique statistique elle-même.

LES DEUX GRANDES CATÉGORIES DE LA MÉCANIQUE STATISTIQUE

1. Étude des systèmes en équilibre thermodynamique

Les systèmes en équilibre thermodynamique sont des systèmes **isolés** pour lesquels leurs paramètres **macroscopiques** ne changent pas en fonction du temps. Par exemple, pour de tels systèmes, le volume V , la température T , la pression P , l'entropie S , l'énergie interne U , etc., sont des **constantes**. De plus, parmi ces paramètres, les paramètres **intensifs** (comme T et P) sont aussi **constants** dans l'espace.

Notre étude se restreint à des systèmes en équilibre thermodynamique.

(Les 11 premiers chapitres du livre de Reif, par exemple, sont consacrés à la mécanique statistique en équilibre.)

2. Étude des systèmes hors équilibre

Les systèmes macroscopiques de particules (isolés ou non) qui ne sont pas en équilibre thermodynamique ont des paramètres qui changent en fonction du temps. En général, les systèmes isolés évoluent toujours vers un état d'équilibre final. L'étude de l'approche à l'équilibre thermodynamique est un **problème dépendant du temps**. C'est un problème beaucoup plus complexe que l'étude des systèmes en équilibre. De plus, **il faut évidemment comprendre les caractéristiques des systèmes en équilibre préalablement**.

(Les 4 derniers chapitres de Reif sont consacrés à l'étude des systèmes hors équilibre.)

MÉCANIQUE STATISTIQUE EN ÉQUILIBRE

On peut encore diviser en deux domaines l'étude statistique des systèmes en équilibre.

1. Les gaz parfaits

Dans ces systèmes, l'énergie potentielle d'interaction moyenne entre les particules est **négligeable** comparée à l'énergie cinétique moyenne des particules.

C'est ce que nous allons supposer dans les chapitres 2, 3, 4 et 5 de notre cours.

Même si cette approche semble plutôt limitée, on peut, en introduisant l'astuce des "quasi-particules", décrire des systèmes beaucoup plus complexes que des gaz dilués en termes des outils que nous allons développer. Par exemple, on verra qu'un **solide** peut se décrire en termes d'un "gaz parfait" de quasi-particules appelées "phonons" (théorie de Debye des solides).

2. Les systèmes avec interaction moléculaire

- gaz imparfaits
- liquides
- théories sophistiquées des solides
- ferromagnétisme

Le chapitre 6 de notre cours sera consacré à une étude de gaz imparfaits (ou réels).

NOTRE APPROCHE

1. On reconnaît que la Nature est **quantique** à l'échelle microscopique. Ceci a des conséquences **fondamentales** sur les propriétés de systèmes macroscopiques, conséquences qui ne peuvent pas être expliquées en termes purement classiques.
2. On reconnaît que la matière est constituée d'**atomes** et de **molécules** (faits eux-mêmes de protons, neutrons et électrons).

Pour les systèmes qui vont nous intéresser, la structure nucléaire reste inchangée, ce qui implique que l'on peut négliger l'interaction nucléaire forte et l'interaction nucléaire faible. De plus, puisque la gravité

est négligeable à l'échelle microscopique, la seule interaction d'importance (pour déterminer par exemple les niveaux d'énergie d'excitation électronique dans un atome) est l'**interaction électromagnétique**.

3. À cause des **très** grands nombres de particules en jeu (e.g., une mole de gaz contient $N_0 \simeq 6 \times 10^{23}$ molécules), il va de soi qu'il est impossible de déterminer en détail les états d'énergie de chacune des particules d'un système macroscopique. On se sert plutôt de **méthodes statistiques** pour traiter de ces problèmes.

De telles méthodes sont maintenant bien connues et sont simples du point de vue mathématique. Par contre, **d'un point de vue conceptuel**, ces méthodes sont très complexes et sont le produit du travail remarquable de génies de la physique tels Gibbs, Maxwell, Boltzmann, Bose, Einstein, Fermi, Dirac, Schrödinger et d'autres encore.

4. Le comportement statistique d'un système macroscopique se décrit en termes d'**ensembles**, des constructions imaginaires constituées d'un très grand nombre de systèmes semblables au système original et qui peuvent se distribuer dans les différents états quantiques accessibles à ce système.

En calculant toutes les façons possibles avec lesquelles les différents systèmes d'un ensemble peuvent se distribuer sur les états quantiques accessibles, on en arrive à la **distribution la plus probable**, i.e., celle que l'on peut observer le plus souvent dans l'ensemble. **À la limite des très grands nombres**, la fréquence de la distribution la plus probable augmente énormément pour être, **à toutes fins pratiques**, la seule distribution d'intérêt.

On suppose alors que LA distribution d'un système sur ses états quantiques accessibles est la distribution la plus probable de l'ensemble statistique.

Évidemment, on peut s'attendre à des **fluctuations statistiques** autour de la distribution la plus probable. Par exemple, l'énergie interne d'un gaz parfait monoatomique classique sans degré de liberté interne constitué de N particules identiques dans une enceinte de volume V et maintenue à température T est $U = 3/2NkT$, telle que donnée par la distribution la plus probable. En réalité, l'énergie est connue à ΔU près ($3/2NkT \pm \Delta U$), correspondant aux fluctuations possibles. **Si N est très grand, les fluctuations deviennent complètement négligeables ($\Delta U \ll 3/2NkT$).**

Nous ne considérerons pas la question de fluctuations dans notre cours.

THERMODYNAMIQUE ET MÉCANIQUE STATISTIQUE

Développée historiquement en premier, la **thermodynamique** nous donne des relations mathématiques utiles entre différentes propriétés expérimentales d'un système macroscopique en équilibre. Par exemple:

$$C_P - C_V = \left(P + \frac{\partial U}{\partial V} \Big|_T \right) \frac{\partial V}{\partial T} \Big|_P.$$

La thermodynamique nous donne donc de telles relations entre les paramètres macroscopiques d'un système mais ne permet pas d'évaluer isolément la valeur d'un de ces paramètres, e.g., la valeur de la pression P . Ainsi, et par exemple, la "loi des gaz" bien connue $PV = NkT$ n'est pas le résultat d'un calcul ou d'une prédiction de la thermodynamique, mais, historiquement, fut un résultat strictement expérimental et empirique.

La thermodynamique ne fait pas appel à la nature corpusculaire de la matière et la plupart de ses relations seraient encore valides si la matière était continue. Ceci en fait sa force (puisque les relations sont très générales) et sa faiblesse (puisque l'on ne peut pas interpréter physiquement ces relations et qu'on ne peut pas non plus calculer une quantité isolée).

C'est la **mécanique statistique** qui nous permet de faire ces interprétations et calculs (on verra, entre autres, comment obtenir $PV = NkT$ par le calcul à partir de principes premiers). La mécanique statistique englobe **complètement** la thermodynamique en plus de permettre une interprétation de phénomènes macroscopiques d'un point de vue moléculaire. **C'est donc une approche beaucoup plus puissante et élégante que la thermodynamique!**

REMARQUE SUR LA CHALEUR SPÉCIFIQUE

Définition formelle (à volume constant);

$$C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V$$

unités: énergie/(unité de température), (ergs/K en c.g.s)

Interprétation physique: **mesure de la capacité qu'a un système pour stocker de l'énergie.**

La chaleur spécifique est une quantité **extrêmement importante** d'un point de vue expérimental puisqu'il s'avère qu'on peut la mesurer relativement facilement et, ceci, avec grande précision.

La chaleur spécifique est la quantité la plus souvent utilisée (mesurée) pour mettre à l'épreuve les prédictions de la mécanique statistique. Dans notre cours, nous **calculerons** C_V à partir des principes premiers de la mécanique statistique.

Une dernière remarque est que dans certains ouvrages français notre définition d'au-dessus est appelée **capacité calorifique**, alors que l'expression **chaleur spécifique** est réservée à la **capacité calorifique par unité de masse**. Nous suivrons plutôt l'usage nord-américain dans l'emploi de l'expression "chaleur spécifique".